

# Vorticidad y socavación fluvial alrededor de las estructuras hidráulicas : una revisión

## RESUMEN

**Toribio Reyes Rodríguez**

*treyesr@unasam.edu.pe*

*Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo - Huaraz - Perú.*

**Maximiliano Asís-López**

*masisl@unasam.edu.pe*

*Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo - Huaraz - Perú.*

El objetivo principal fue analizar la vorticidad como fenómeno hidráulico, que influye en la socavación fluvial alrededor de las estructuras hidráulicas. La metodología consistió en la revisión de bibliografía y de artículos científicos relacionados a la vorticidad y su efecto en la socavación. Una de las conclusiones relevantes es que la deducción de la ecuación de la vorticidad se realiza a partir de la ecuación de Navier-Stokes, la misma que contiene los términos de advección y la tasa de cambio de la vorticidad local en el primer miembro; mientras que el segundo miembro contiene los términos de estiramiento y difusión de la vorticidad. La advección de la vorticidad consiste en el transporte de la vorticidad a lo largo del río, que contribuye a la socavación general pero más en la socavación local. El estiramiento de la vorticidad representa la intensificación de la vorticidad en la dirección de la velocidad del flujo, que contribuye a la socavación local y la difusión de la vorticidad que expresa la atenuación de la vorticidad. Detrás de los pilares de los puentes se generan desprendimiento de vórtices de estela, que se evalúan a través del número de Strouhal.

**Palabras clave:** Vorticidad; Socavación; Espigones; Advección; Estiramiento; Difusión; Número de Strouhal

**Cómo citar este artículo:** Vorticidad y socavación fluvial alrededor de las estructuras hidráulicas : una revisión. (2025). *Aporte Santiaguino*, 18(1), pp. 99-110. <https://doi.org/10.32911/as.2025.v18.n1.1226>

Recibido: 2025-02-26 | Aceptado: 2025-08-12

## Vorticity and fluvial scour around hydraulic structures: a review

The main objective was to analyze vorticity as a hydraulic phenomenon that influences fluvial scour around hydraulic structures. The methodology consisted of a review of bibliographies and scientific articles related to vorticity and its effect on scour. One of the relevant conclusions is that the deduction of the vorticity equation is carried out from the Navier – Stokes equation, which contains the advection terms and the rate of change of local vorticity in the first member; while the second member contains the vorticity stretching and diffusion terms. Vorticity advection consists of the transport of vorticity along the river, which contributes to general scour but more to local scour, vorticity stretching represents the intensification of vorticity in the direction of flow velocity, which contributes to local scour and vorticity diffusion which expresses vorticity attenuation. Wake vortex shedding is generated behind bridge piers and is evaluated using the Strouhal number.

**Keywords:** Vorticity; Undermining; Breakwaters; Advection; Stretching; Diffusion; Strouhal number

### INTRODUCCIÓN

La socavación es una de las principales causas de falla de las estructuras hidráulicas, como puentes y diques. Este fenómeno ocurre debido a la interacción entre las estructuras, lecho del río y el flujo del agua, lo que genera fuerzas que erosionan el material del lecho del río. En este contexto, la vorticidad, definida como la rotación del fluido, es un factor importante porque intensifica los procesos de socavación (Melville & Coleman, 2014). Comprender cómo se genera y evoluciona la vorticidad alrededor de las estructuras hidráulicas es importante para diseñar estrategias efectivas de prevención y mitigación contra la socavación.

Los modelos matemáticos permiten la descripción de la relación entre la vorticidad y los parámetros del flujo (Chanson, 2009). No obstante, su aplicación práctica enfrenta desafíos debido a las condiciones variables y complejas de los entornos fluviales. Las vorticidades se generan en zonas donde existen gradientes de velocidad. Estos gradientes producen fuerzas hidrodinámicas, aunque en realidad existe una acción recíproca entre la vorticidad y las fuerzas hidrodinámicas.

Por otro lado, Chen et al. (2023) afirma que el coeficiente de rugosidad de Manning no solo afecta la capacidad de conducción del cauce, también modifica patrones de vorticidad porque se generan gradientes de velocidad en las proximidades de las superficies rugosas que inducen vorticidades y redistribución del flujo.

Desde un punto de vista matemático, la vorticidad puede representarse como el rotacional del campo de velocidades:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$$

donde  $\vec{\omega}$  es el vector de vorticidad,  $\vec{V}$  el vector velocidad y  $\nabla$  el operador nabla (Cengel, 2014; Dey et al., 2008; Wu et al., 2006). Esta representación permite analizar la dinámica de los fluidos mediante la ecuación de Navier-Stokes para flujos incompresibles y a viscosidad constante:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

donde  $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt}$  representa la fuerza neta que actúa sobre una partícula de fluido por unidad de volumen,  $-\nabla p$  denota la fuerza por unidad de volumen que ocurre debido a las diferencias de presión de un fluido y actúa en la dirección de menor presión, y  $\mu \nabla^2 \vec{V}$  designa la fuerza viscosa por unidad de volumen, es decir, es la difusión del momentum lineal en el fluido; que es una fuerza atenuadora de las variaciones bruscas de la velocidad del flujo (Cengel, 2014).

La ecuación de la vorticidad, deducida de la ecuación de Navier-Stokes, predice cómo la vorticidad cambia en el tiempo:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}$$

En esta ecuación,  $\frac{D\vec{\omega}}{Dt}$  designa la deriva material de la vorticidad para una partícula de fluido a medida que se mueve en el campo de flujo,  $(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V}$  representa el estiramiento de la vorticidad, mientras  $\nu \nabla^2 \vec{\omega}$  designa la difusión viscosa de la vorticidad.

Las partículas en suspensión tienden a aumentar la viscosidad porque ofrecen mayor resistencia al flujo. Sin embargo, según Maeda y Fukui (2025) las partículas pueden reducir la viscosidad cuando éstas migran desde las orillas hacia el centro del río. Por otro, las partículas pueden aumentar o disminuir la viscosidad del fluido, por la tanto, tienen efecto en la generación o atenuación de la vorticidad.

A la vez, la deriva material de la vorticidad es igual a la identidad que se detalla:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

En esta identidad  $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega}$  designa la advección de la vorticidad y  $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$  representa la

tasa de cambio de la vorticidad local (Potter, 2012). Además, el número de Strouhal ( $S_i$ ) permite analizar la frecuencia de desprendimiento de vórtices cuando el de flujo de agua y la estructura hidráulica interactúan entre sí:

$$S_i = \frac{fL}{V}$$

donde  $f$  es la frecuencia de desprendimiento de vórtices,  $L$  la longitud característica de la estructura hidráulica y  $V$  la velocidad del flujo (White, 2016). Este parámetro adimensional

es importante en el estudio de los fenómenos periódicos como la resonancia mecánica, vibración de puentes y desprendimientos de vórtices. La resonancia mecánica consiste en la amplificación creciente de las oscilaciones que queden ocasionar el colapso de la estructura vibrante, este fenómeno ocurre cuando la frecuencia de desprendimiento de vórtices coincide a la frecuencia natural de la estructura hidráulica (Bourguet et al., 2011).

La tasa de cambio de la vorticidad de una partícula de fluido en un campo de flujo se expresa mediante la ecuación

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nabla_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

En esta ecuación,  $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}$  representa la tasa de cambio

de la vorticidad de una partícula de fluido en un determinado punto del campo de flujo, y  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$

designa la aceleración local de una partícula de fluido.

Según White (2016), la aceleración advectiva del flujo de fluidos cumple con la identidad vectorial que se indica

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) + (\nabla_x \vec{V})_x \vec{V}$$

En esta identidad,  $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$  representa la

aceleración advectiva, es decir, la aceleración del flujo del fluido debido a su movimiento a través del campo de velocidades;  $\nabla \left( \frac{V^2}{2} \right)$  representa la

variación espacial de la energía cinética por unidad de masa del fluido y  $(\nabla_x \vec{V})_x \vec{V}$  designa la

interacción de la rotacional con el campo de velocidades.

La rotacional de la aceleración advectiva para un flujo incompresible cumple con la

identidad vectorial que se describe

$$\nabla_x \left( (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V}$$

En esta identidad vectorial,  $\nabla_x \left( (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right)$

designa la vorticidad de la aceleración advectiva,  $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega}$  representa la advección de la vorticidad y  $(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V}$  representa el estiramiento de la vorticidad.

White (2016) especifica que, si la frecuencia de desprendimiento de los vórtices se aproxima a la frecuencia de vibración natural de la estructura, puede producirse la resonancia mecánica de la misma, que consiste en la amplificación de las oscilaciones debido al efecto combinado de la energía externa e interna del sistema. Esta condición de resonancia se caracteriza por una sincronización de frecuencias entre la estela y el cuerpo cerca de una frecuencia natural estructural (Bourquet et al., 2011).

En este artículo se presenta la revisión de literatura reciente relacionada a la dinámica de la vorticidad y su impacto en la socavación de las estructuras hidráulicas. Se consideran las ecuaciones matemáticas más importantes, conceptos relevantes y aplicaciones prácticas, proporcionando un enfoque integral sobre los desafíos y avances en este tema.

## MATERIALES Y MÉTODOS

La revisión sistemática de la literatura se realizó utilizando bases de datos científicas reconocidas, como Scopus, Web of Science y Google Scholar. Se consideraron artículos científicos publicados, priorizando las investigaciones experimentales, modelos teóricos y simulaciones numéricas que tienen en cuenta la interacción de la vorticidad con el lecho de los ríos y las estructuras hidráulicas.

Los artículos seleccionados se clasificaron considerando las investigaciones realizadas sobre fenómenos de socavación en canales de laboratorio y modelos físicos. También se consideraron simulaciones numéricas basadas en la dinámica de fluidos computacional (CFD) para la modelación y predicción del comportamiento de la vorticidad en las proximidades de las estructuras hidráulicas. Asimismo, se tuvo en cuenta los hallazgos más importantes obtenidos mediante modelos físicos y numéricos. Esta metodología permitió una integración estructurada y crítica de la información obtenida, ofreciendo una visión sistémica sobre la vorticidad y la socavación fluvial alrededor de las estructuras hidráulicas.

## DESARROLLO Y DISCUSIÓN

### Mecanismos de la formación de vórtices

En la formación de las vorticidades en los ríos intervienen diversos factores interactuantes como la geometría del cauce, la rugosidad del lecho y la presencia de estructuras hidráulicas. La advección, es decir, el transporte de vorticidad a lo largo del flujo, condicionada por el campo de velocidades. El estiramiento de vorticidad, provocado por el gradiente de la velocidad en la dirección del flujo que intensifica la socavación, la difusión de vorticidad actúa como un mecanismo de la atenuación de la vorticidad debida a la viscosidad del fluido.

La presencia de obstáculos generan cambios en el comportamiento del flujo que originan turbulencias y vorticidades. Por ejemplo, los pilares y espigones modifican la presión local, separando el flujo y creando zonas de baja presión o estela. La relación entre la profundidad del flujo y el tamaño del obstáculo afecta directamente los patrones de vorticidad y socavación (Pizarro, 2020). La vorticidad también es influenciada por la morfología y geometría del cauce, como curvas pronunciadas o variaciones en las secciones transversales.

El flujo descendente en la parte frontal del pilar es el factor erosivo más importante, la profundidad de socavación va desde los lados del pilar hacia su parte frontal y sigue un patrón logarítmico de crecimiento. Además, la forma del vórtice varía de circular a elíptica a medida que avanza la socavación (Unger & Hager, 2007). Los factores que afectan la socavación local en los pilares de puentes son la velocidad del flujo, la profundidad de flujo, el tamaño de los sedimentos y la forma del pilar (Melville, 2008).

Mediante investigación experimental y de modelación numérica con Flow-3D v11.2 Wang et al. (2024) hallaron que el descenso del flujo ocurre cuando el agua encuentra un obstáculo, como un pilar de puente, lo que causa la separación de la capa límite y el incremento de presión en la parte frontal del pilar; el flujo de agua descendente en la dirección al lecho del río impacta al lecho del río y produce socavación, asimismo constataron que los vórtices de herradura acentúan los proceso de socavación local.

La socavación alrededor del estribo de un puente está determinada por los vórtices en herradura, cuyos movimientos rotacionales generan esfuerzos cortantes en el lecho adyacente al estribo (Koken & Gogus, 2020). De la misma manera, Paik et al. (2014) encontraron que los vórtices de herradura y de estela generan esfuerzos cortantes frente a un cilindro colocado en un canal experimental. Constataron que los gradientes de presión generan flujo descendente que intensifica la socavación. Los vórtices de estela se forman cuando un flujo choca con un obstáculo, en el cual la capa límite se separa debido el gradiente de presión adverso y la viscosidad entre la parte frontal y posterior del cilindro. En las zonas de vórtices de estela se crean flujos rotacionales denominados calles de vórtices de von Kármán que generan vibración sobre la estructura hidráulica.

Chen et al. (2019) determinaron que los vórtices de herradura primarios (PHV) se

forman cuando el flujo de agua impacta la base del cilindro y esta se separa creando una zona de alta presión en el punto de estancamiento y zonas de baja presión en la zona de separación del flujo. Esta diferencia de presión, junto con el cambio de dirección del flujo alrededor del cilindro, produce los vórtices en herradura frente al cilindro; también se generan vórtices de herradura secundarios: contrarrotatorios y progradientes que atenuan o intensifican los PHV. Por otra parte, los vórtices atrapados erosionan las superficies de los cuerpos sólidos que están sumergidos dentro del flujo (Hirts y McDonald, 2024).

Rodríguez y Escauriza (2010) indican que los vórtices de Görtler se forman aguas abajo de las compuertas rectangulares planas cuando el flujo de agua pasa a través de una superficie cóncava, que genera inestabilidad centrífuga debido a la diferencia de presiones entre las capas de fluido cercanas y alejadas del fondo. Los vórtices de Görtler se forman cuando el agua fluye sobre una superficie cóncava por la interacción de la aceleración centrífuga y la inercia del flujo.

### **Medidas de mitigación y control de la socavación**

La mitigación y el control de la socavación en estructuras hidráulicas pueden lograrse mediante diversas estrategias, como el uso de enrocados de volteo con filtro granular o geotextil tejido y deflectores. Estas estrategias son efectivas para modificar la dirección del flujo y reducir la energía turbulenta de los vórtices. En el caso de los pilares, un diseño con nariz de forma semicircular disminuye la resistencia al flujo, minimiza la separación de flujo y reduce significativamente la formación de vórtices. Además, las pilas de sacrificio se emplean como elementos diseñados para erosionarse antes que las estructuras principales, actuando como una medida de protección preventiva.

Kumcu et al. (2014) estudiaron experimentalmente el uso de collares para la protección contra la socavación en estribos de puentes con paredes verticales. La ubicación óptima del collar es por debajo del lecho del río, que reduce la formación de vórtices de herradura. Pueden ser de forma anular, rectangular, elíptico; el material puede ser de acero, concreto reforzado, fibra de vidrio y otros polímeros. Por otra parte, Mohamed (2020) observó que los pilares circulares reducen la profundidad de la socavación más que los pilares cuadrados.

Los espigones permeables permiten el paso parcial del flujo, lo que disminuye tanto la velocidad como la separación del flujo, reduciendo así la formación de vórtices. Choufu et al. (2019) indican que los espigones colocados a 90° generan mayor profundidad de socavación, mientras que los colocados con ángulos de 120° a 135° respecto a la orilla y con longitudes crecientes en la dirección del flujo del río producen zonas de menor velocidad y socavación porque se generan vórtices más débiles. La longitud de los espigones se aumentan en la dirección aguas abajo del flujo para aumentar la sedimentación.

Existen métodos estandarizados para medir la conductividad hidráulica de los suelos, a nivel de laboratorio o *in situ* (Budhu, 2007). Sin embargo, no hay un método estandarizado para medir la conductividad hidráulica de estructuras hidráulicas de protección de riberas.

Barandal y Das (2024) indican que la socavación local es la causa principal de falla en los puentes. Determinaron que la velocidad del flujo, el tipo de sedimento y la geometría del pilar influyen en la profundidad de socavación, concluyen que las técnicas contra la socavación local combinadas ofrecen mejores resultados contra la socavación.

Adnan et al. (2025) en la investigación experimental de la socavación local alrededor de

un pilar apoyado en una cimentación circular, bajo flujo permanente en condiciones de agua clara, determinaron el efecto de la relación altura-diámetro (H/D) de la cimentación; la socavación se incrementa cuando la cimentación pasa de estar enterrada a expuesta porque la formación de vórtices es más rápida.

La profundidad de la cimentación debe ser la mayor entre la profundidad estructural y la profundidad hidráulica, considerando además un factor de seguridad que garantice la estabilidad de la estructura hidráulica.

### **Soluciones exactas y numéricas de los modelos de socavación**

Los métodos de solución de la ecuación de la vorticidad se clasifican en analíticas y numéricas. Los métodos analíticos son precisos y aplicables a un rango muy restringido de problemas. En contraste, los métodos numéricos son esenciales para abordar problemas más complejos, incluyendo los basados en malla y sin malla (Rossi et al., 2015).

Simulaciones realizadas con RiverFlow2D demostraron que la eliminación de la vegetación en los lechos fluviales es una de las estrategias más efectivas para mitigar inundaciones, logrando reducir la profundidad del agua hasta en 1 metro (Echeverribar et al., 2017). Por otra parte, la vegetación flexible en el lecho del río reduce la erosión al disminuir el esfuerzo cortante del flujo. La erradicación de la vegetación es una solución de corto plazo y local. Bajo el marco del desarrollo sostenible se recomienda trabajar con estrategias alineadas al comportamiento natural del río y su ecosistema.

Según Liao et al. (2021), el CCHE2D es un modelo numérico desarrollado por la National Center for Computational Hydroscience and Engineering (NCCHE) para la simulación de la socavación de las estructuras hidráulicas en los

ríos, predice la morfodinámica del lecho con un menor costo computacional que los modelos 3D. El modelo Flow 3D 11.2 permite la modelación de flujos tridimensionales y de procesos de socavación alrededor de los pilares de puentes, también simula el transporte de sedimentos empleando las ecuaciones de Van Rijn (Omara & Tawfik, 2018).

Saha et al. (2018) proponen desarrollar una metodología para la predicción de la socavación en pilares de puentes, considerando la interacción entre la socavación local y por contracción. Precisan que las ecuaciones de socavación local de la Colorado State University (CSU) y Melville-Sheppard pueden subestimar o sobrestimar la socavación local. Además, indican que la profundidad de socavación local se incrementa cuando aumenta la razón de contracción de flujo ( $q_2/q_1$ ). También recomiendan realizar investigaciones de socavación local con modelos físicos y numéricos basados en la dinámica de fluidos computacional (CFD).

Zaid et al. (2019) destacan la importancia del uso de modelos de dinámica fluidos computacional (CFD) y de técnicas de protección de los pilares de los puentes como collares y refuerzos en la base, la combinación de simulaciones numéricas y experimentales mejora la predicción y control de la socavación local.

Los softwares HEC-RAS y FDOT se emplean para la predicción de la socavación local en pilares de puentes, el primero es adecuado para estimar la socavación local en pilares de ancho convencional, y el FDOT para pilares anchos, señala Al – Jubouuri (2023). El HEC – RAS para el análisis de flujo transitorio en ríos resuelve las ecuaciones Saint – Venant mediante el método de diferencias finitas implícitas y la ecuación de Navier – Stokes con el método de volúmenes finitos.

De la revisión realizada, se advierte que los programas computacionales pueden generar

predicciones muy cercanas a la realidad siempre que se realice una calibración adecuada de sus parámetros, se cumplan los supuestos teóricos de cada modelo y se delimiten correctamente las condiciones de frontera. De lo contrario, los resultados no tendrán validez ni confiabilidad.

### **Análisis de vorticidad y socavación con inteligencia artificial**

Yousif et al. (2019) compararon técnicas de Machine Learning ELM (Extreme Learning Machine) y MARS (Multivariate Adaptive Regression Spline) para la predicción de la socavación en compuertas delgadas planas en un canal abierto de laboratorio. La técnica ELM fue más precisa que MARS. Se emplearon datos dimensionales y no dimensionales de flujo y de sedimentos en la predicción de la profundidad, longitud y posición de la socavación.

La profundidad de socavación en pilares de puentes mediante modelos Machine Learning (ML) ANFIS y GEP son más precisos y confiables que las ecuaciones empíricas existentes. Los factores considerados en la predicción de la socavación son la relación entre el ancho del pilar y la profundidad del flujo, el número de Froude, la velocidad del flujo de aproximación respecto a la velocidad crítica, y el diámetro medio de los sedimentos (Kumar et al., 2024).

Para la predicción de la socavación alrededor de los estribos de un puente se compararon modelos de IA: redes neuronales artificiales (ANN), sistemas neurodifusos adaptativos (ANFIS), bosques aleatorios (RF) y con ecuaciones empíricas clásicas. El ANFIS fue el mejor modelo de IA. Los datos se tomaron en el modelo hidráulico de un puente (Khan et al., 2024)

## CONCLUSIÓN

La investigación de la socavación de estructuras hidráulicas se realiza mediante modelos físicos, numéricos e inteligencia artificial. A pesar de los avances científicos y tecnológicos logrados en este campo, aún existen desafíos debido a la compleja interacción de los sistemas fluviales con las estructuras hidráulicas.

La socavación es un fenómeno complejo en el cual interactúan el flujo de agua, los sedimentos, la forma y tamaño de las estructuras hidráulicas. Entre los factores relevantes que causan la socavación se encuentran la aceleración del flujo, el flujo descendente (downflow) y la formación de vórtices de estela y herradura, cuando el flujo encuentra un obstáculo. Los vórtices de Görtler cuando el flujo pasa por una superficie cóncava producen inestabilidad del flujo aunque su efecto de socavación es mínimo.

El transporte de la vorticidad a lo largo del río se conoce como advección. El estiramiento de la vorticidad intensifica su magnitud, lo que a su vez aumenta la socavación local al aumentar las fuerzas de corte en el lecho. Por otra parte, la difusividad de la vorticidad consiste en su atenuación debido a la viscosidad del flujo.

Para la mitigación y control de la socavación existen diferentes técnicas como enrocados de volteo con filtro granular o geotextil tejido que evitan la migración de suelo fino. También se usan deflectores que disipan la energía del flujo, pilas de sacrificio que desvían el flujo y los collares que protegen la cimentación de las estructuras hidráulicas. Además, se reduce la socavación manejando la geometría transversal de los pilares, prefiriéndose las formas hidrodinámicas porque reducen la formación de vórtices al atenuar la separación de la capa límite.

## REFERENCIAS

- Adnan, M., Zhao, M., Wu, H., & Dhamelia, V. (2025). Experimental study of local scour around a compound pile under steady current. *Ocean Engineering*, 318, 120151. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2024.120151>
- Al-Jubouri, M., & Ray, R. (2023). A comparative study of local scour depth around bridge piers. *Pollack Periodica*, 18(1), 100–105. <https://doi.org/10.1556/606.2022.00649>
- Baranwal, A., & Das, B. (2024). Scouring around bridge pier: A comprehensive review of countermeasure techniques. *Engineering Research Express*, 6(022103). <https://doi.org/10.1088/2631-8695/ad5495>.
- Bourguet, R., Modarres-Sadeghi, Y., Karniadakis, G. E., & Triantafyllou, M. S. (2011). Wake-body resonance of long flexible structures is dominated by counterclockwise orbits. *Physical review letters*, 107(13), 134502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.134502>
- Cengel, Y., & Cimbala, J. (2014). *Fluid mechanics*. McGraw – Hill.
- Budhu, M. (2007). *Soil mechanics and foundations*. John Wiley & Sons.
- Chanson, H. (2009). *Applied hydrodynamics: an introduction to ideal and real fluid flows*. CRC press.
- Chen, Q., Yang, Z., & Wu, H. (2019). Evolution of turbulent horseshoe vortex system in front of a vertical circular cylinder in open channel. *Water*, 11(10), 2079. <https://doi.org/10.3390/w11102079>

- Chen, Z., Zhou, J., & Chen, Q. (2023). Research and Application of the Calculation Method of River Roughness Coefficient with Vegetation. *Water*, 15(7), <https://doi.org/10.3390/w15142638>
- Choufu, L., Abbasi, S., Pourshahbaz, H., Taghvaei, P., & Tfwala, S. (2019). Investigation of flow, erosion, and sedimentation pattern around varied groynes under different hydraulic and geometric conditions: A numerical study. *Water*, 11(2), 235. <https://doi.org/10.3390/w11020235>
- Dey, S., Raikar, R. V., & Roy, A. (2008). Scour at submerged cylindrical obstacles under steady flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 134(1), 105-109. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2008\)134:1\(105\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2008)134:1(105))
- Echeverribar, I., Morales-Hernández, M., Lacasta, A., Brufrau, P., & García-Navarro, P. (2017). Simulación numérica con RiverFlow2D de posibles soluciones de mitigación de avenidas en el tramo medio del río Ebro. *Ingeniería del agua*, 21(1), 53-70. <https://doi.org/10.4995/ia.2017.6550>
- Fay, J. (1996). *Mecánica de fluidos*. México: Compañía Editorial Continental, S.A.
- Hirst, C., McDonald, N. (2024). *Erosion of surfaces by trapped vortices*. *Journal of Engineering Mathematics*, 148(7). <https://doi.org/10.1007/s10665-024-10396-6>
- Khan, Z., Khan, D., Murtaza, N., Pasha, G., Alotaibi, S., Rezzoug, A., Benzougagh, B., & Khedher, K. (2024). Advanced prediction models for scouring around bridge abutments: A comparative study of empirical and AI techniques. *Water*, 16(3082). <https://doi.org/10.3390/w16213082>
- Koken, M., Gogus, M. (2010). *Time evolution of the horseshoe vortex system forming around a bridge abutment*. In S. E. Burns, S. K. Bhatia, C. M. C. Avila, & B. E. Hunt (Eds.), *Proceedings of the 5th International Conference on Scour and Erosion (ICSE-5), November 7-10, 2010, San Francisco, USA* (pp. 668-677). American Society of Civil Engineers. <https://hdl.handle.net/20.500.11970/100281>
- Kumcu, S., Kokpinar, M., & Gogus, M. (2014). Scour protection around vertical-wall bridge abutments with collars. *KSCCE Journal of Civil Engineering*, 18(6), 1884-1895. <https://doi.org/10.1007/s12205-014-0245-4>
- Maeda, J., & Fukui, T. (2025). Numerical study of suspension viscosity accounting for particle–fluid interactions under low-confinement conditions in two-dimensional parallel-plate flow. *Processes*, 13(690). <https://doi.org/10.3390/pr13030690>
- Marsden, J., Tromba, A. (2012). *Vector calculus*. Freeman and Company Publishers.
- Melville, B. (2008). The physics of local scour at bridge piers. In H. Sekiguchi (Ed.), *Proceedings of the 4th International Conference on Scour and Erosion (ICSE-4)* (pp. 28-40). The Japanese Geotechnical Society. <https://hdl.handle.net/20.500.11970/100095>
- Mohamed, W. (2020). Effect of local scour on foundation of hydraulic structure. *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, 7(2), 916-924. <https://www.irjet.net>

- Liao, C., Yeh, K., Lan, Y., Jhong, R., & Jia, Y. (2021). Improving the 2d numerical simulations on local scour hole around spur dikes. *Water*, 13(11), <https://doi.org/10.3390/w13111462>.
- Omara, H., Tawfik, A. (2018). Numerical study of local scour around bridge piers. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 151(012013). <https://doi.org/10.1088/1755-1315/151/1/012013>
- Paik, J., Bombardelli, F., & Lee, N. (2014). Numerical simulation of turbulent free surface flow around a circular cylinder. In Lehfeldt & Kopmann (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Hydro-Science & Engineering (ICHE 2014)* (pp. 991-999). Bundesanstalt für Wasserbau. ISBN 978-3-939230-32-8.
- Pizarro, S., Manfreda, S., Tubaldi, E. (2020). The science behind scour and bridge foundation: a review. *Water*, 12(374). <https://acortar.link/qtqSO4>
- Potter, M., & Wiggert, D. (2012). *Mechanics of fluids*. Cengage Learning.
- Rodríguez, B., & Escauriaza, C. (2010). Turbulent flow in the scour hole downstream of a sluice gate: erosion induced by Görtler vortices. En Dittrich, A.; Koll, K.; Aberle, J.; Geisenhainer, P. (Eds.), *River Flow*, Karlsruhe: Bundesanstalt für Wasserbau, pp. 195-202. <https://hdl.handle.net/20.500.11970/99646>.
- Rossi, E., Colagrossi, A., & Graziani, G. (2015). Numerical simulation of 2D-vorticity dynamics using particle methods. *Computers and Mathematics with Applications*, 69(12), 1484-1503. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.04.004>
- Saha, R., Lee, S., Hong, S. (2018). A comprehensive method of calculating maximum bridge scour depth. *Water*, 10(11), 1572. <https://doi.org/10.3390/w10111572>
- Wang, W., Wei, S., Zhu, D., Wang, J., & Duan, H. (2024). Characteristics and mechanism of downflow in front of a cylindrical pier with clear-water local scour. *Water*, 16(1863). <https://doi.org/10.3390/w16131863>
- White, F. (2016). *Mechanics of fluids*. McGraw – Hill Education
- Unger, J., & Hager, W. (2007). Downflow and horseshoe vortex characteristics of sediment embedded bridge piers. *Experiments in Fluids*, 42(1), 1–19. <https://doi.org/10.1007/s00348-006-0209-7>
- Wu, J. Z., Ma, H. Y., Zhou, M. D., Wu, J. Z., Ma, H. Y., & Zhou, M. D. (2006). Typical vortex solutions. *Vorticity and Vortex Dynamics*, 255-321. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-29028-5\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-540-29028-5_6)
- Yousif, A., Sulaiman, S., Diop, L., Ehteram, M., Shahid, S., Al-Ansari, N., Yaseen, Z. (2019). Open channel sluice gate scouring parameters prediction: Different scenarios of dimensional and non-dimensional input parameters. *Water*, 11(2), 353. <https://doi.org/10.3390/w11020353>
- Zaid, M., Yazdanfar, Z., Chowdhury, H., Alam, F. (2019). A review on the methods used to reduce the scouring effect of bridge pier. *Energy Procedia*, 160, 45–50. <https://doi.org/10.1016/j.egypro.2019.02.117>