http://dx.doi.org/10.32911/as.2014.v7.n2.473

Recibido, 24/07/2014 Aceptado, 10/12/2014 ARTÍCULO ORIGINAL

Existencia y aproximación de soluciones para el modelo atmosférico de precipitaciones pluviales

Existence and approximation of solutions for the atmospheric rainfall model

Juana Idelza Zavaleta Gómez.[1], Obidio Rubio Mercedes.[2]

RESUMEN

Trata sobre la existencia de soluciones del modelo matemático atmosférico de precipitaciones pluviales, que es un sistema dinámico espacio-temporal, conformado por ecuaciones diferenciales parciales no lineales que representan a las leyes físicas: conservación de masa, conservación de cantidad movimiento y conservación de agua; la ley de conservación de agua permitió determinar las precipitaciones en estado sólido y/o líquido. En primer lugar se presentó las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan la evolución atmosférica y se formuló el problema matemático a resolver, luego usando las herramientas del análisis funcional se formuló variacionalmente el problema matemático con el fin de hallar soluciones débiles en un tipo de espacios de Solebov. Las soluciones débiles se obtuvieron como límite de soluciones aproximadas, las cuales se generan utilizando el método de Faedo Galerkin.

Palabras clave: Modelo matemático atmosférico; precipitaciones pluviales; leyes de conservación; formulación variacional; método de Faedo Galerkin; espacios de Sobolev.

ABSTRACT

It is discussed on the existence of solutions of atmospheric mathematical model of rainfall was made, which is a space temporal dynamic system, consisting of nonlinear partial differential equations representing physical laws: conservation of mass, conservation of motion quantity and water conservation; water conservation is to determine precipitation in solid and / or liquid state. First deducting equations from conservation laws the mathematical problema was formulated, then using the tools of functional analysis variational was formulated the mathematical problem to find weak solutions to a type of spaces Solebov. Weak solutions was obtained as approximate limit of solutions, which are generated using the Faedo Galerkin method.

Key words: Atmospheric model rainfalls; conservation laws; variationnal formulation; Faedo Galerkin method; Sobolev's space.

[1] Universidad Nacional del Altiplano-Puno.
[2] Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Universidad Nacional de Trujillo, La Libertad.

INTRODUCCIÓN

El modelado de la dinámica atmosférica y predicción del tiempo es un problema matemático de valor inicial, basado en ecuaciones diferenciales parciales no lineales que son producto de las leyes físicas y termodinámicas. Las ecuaciones generales que rigen la dinámica de fluidos son: ecuación de conservación de masa, cantidad de movimiento, conservación de energía, conservación de agua y conservación de gases y aerosoles, el detalle en (Pielke, 2002) y (White, 1991) con variables meteorológicas, como: velocidad del viento, presión atmosférica, temperatura, humedad, contaminación. Estos modelos constituyen la formulación matemática de los procesos atmosféricos de la superficie terrestre y oceánica, desarrollados para simular y predecir el comportamiento de la atmósfera a través de condiciones iniciales y condiciones de contorno especificas.

En la investigación se construye y estudia el modelo matemático atmosférico de precipitaciones pluviales, que es un sistema dinámico del espacio en relación al tiempo, conformado por las ecuación de: conservación del agua (líquido y sólido), ecuación de continuidad y de conservación de cantidad de movimiento; las dos últimas son conocida como ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles (Movilla, 2010 y Temam, 1995). Éstas conforman un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales aplicadas para modelar el comportamiento del fluido, las leyes de conservación constituyen problemas complejos que son relevantes desde un punto de vista matemático, dado que, presentan características importantes que motivan su estudio en la obtención de resultados como: existencia, unicidad, regularidad y soluciones explicitas. Un problemas clásico de éste sistema, es la existencia de soluciones regulares globales para las ecuaciones en el espacio tridimensional, que es un problema abierto, lanzados por la Fundación Clay (Francia, 2000).

La importancia física del estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes, radica en su aplicación en diversas áreas, que van desde previsiones meteorológicas hasta simulaciones físicas hidrodinámicas. Se utilizan para modelar problemas que involucran el movimiento de un fluido (líquido, gaseoso), por tanto, se piensa en el movimiento de gases, masas de aire, masas de agua, corriente marinas, flujo sanguíneo. Físicamente surge al aplicar la segunda ley de Newton a un elemento de masa sometido a la interacción de fuerzas, en las que interviene la presión y las fuerzas del cuerpo, como: rozamiento y gravedad, considerándose también las condiciones de conservación de masa, que debido a la incompresibilidad del fluido se convierte en divergencia nula. Se sabe de trabajos desarrollados para obtener soluciones aproximadas mediante métodos numéricos y con esquemas de discretización en elementos finitos y diferencias finitas (Temam, 1977 y Rubio, 2008), trabajos para demostrar la existencia de soluciones fuerte en el plano y soluciones débiles en el espacio y tiempo (Guermond y Quartapelle, 1998 y Temam, 1995), estos trabajos fueron fundamentales en el desarrollo de la investigación, dado que presentan características similares. En la investigación se demostró la existencia de soluciones débiles aproximadas del problema matemático mediante la formulación variacional y el método de aproximación de Galerkin.

MATERIALES Y MÉTODOS

Materiales

Espacios de Sobolev

Sea p un número en: $1 \leq p \leq \infty$, $m \in Z^{+}$, el espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de funciones $L^{p}(\Omega)$ cuyas derivadas en $D'(\Omega)$, de orden menor o igual a m, están también definidas en $L^{p}(\Omega)$, es decir:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^{p}(\Omega) \,/\, D^{\alpha}u \in L^{p}(\Omega),\ \forall\alpha \quad [\alpha] \leq m\},\ \text{con norma:}$$

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left[\sum_{[\alpha]\leq m} \left|D^{\alpha}u\right|^{p}_{L^{p}(\Omega)}\right]^{1/p} \quad p < \infty$$

Desigualdades importantes.

Teorema 1. (Desigualdad de Cauchy Schwarz) sean $u, v \in E$ espacio de Banach, entonces:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

Teorema 2. (Desigualdad de Poincaré) sea Ω un dominio acotado en R^{n}, entonces existe una constante $\lambda > 0$ tal que: $\lambda\|u\|_{L^{2}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^{2}(\Omega)} = \|u\|_{H_{0}^{1}(\Omega)} \quad \forall u \in H_{0}^{1}(\Omega)$

Teorema 3. (Desigualdad de Young) sean $a, b \geq 0$, $p, q \geq 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces:

$$ab \leq \frac{a^{p}}{p} + \frac{b^{q}}{q}$$

Teorema 4. (Desigualdad de Hölder), sea Ω una región limitada en R^{n}. $f \in L^{p}(\Omega), g \in L^{q}(\Omega)$; $p, q > 1$ tal que: $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces:

$$\int_{\Omega} |f.g|\,dx \leq \left[\int_{\Omega} |f|^{p}\,dx\right]^{1/p} \left[\int_{\Omega} |g|^{q}\,dx\right]^{1/q}$$

Demostración de los teoremas (Brézis 1984)

Teorema 5. (Desigualdad de Gronwall) sea $\varphi(t) \in C^{1}(\Omega)\ con\, \alpha, \beta > 0$, tal que $\varphi'(t) + \alpha\,\varphi(t) \leq \beta$, entonces: $\varphi(t) \leq \varphi(0)e^{-\alpha t} + \dfrac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$

Métodos

Método variacional

El método variacional, consiste en conseguir otra formulación a partir de la formulación clásica, de la que se propone una solución denominada solución débil.

Problema matemático de precipitaciones pluviales.

Asumiendo un fluido en una región $\Omega \subset R^3$ para la representación Euleriana del flujo de este fluido, se consideran funciones $u(x,t)$, $p(x,t)$ y $q_n(x,t)$ que representan a la velocidad, presión y precipitación respectivamente; con $x=(x_1,x_2,x_3)$ en Ω y $t \in R$. Además $u(x,t)=(u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ es la posición de la partícula fluida en un tiempo $t>0$ y si el fluido es Newtoniano entonces $u(x,t)$, $p(x,t)$ y $q_n(x,t)$ están gobernadas por: ecuación de conservación de movimiento, ecuación de conservación de masa y ecuación de conservación de agua. Con condiciones iniciales suficientemente suaves, condiciones de frontera tipo Dirichlet homogéneas. Por tanto el problema consiste en hallar $u(x,t)$, $p(x,t)$ y $q_n(x,t)$ tal que:

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}.\nabla)\vec{u}-\nu\,\Delta\vec{u}+\nabla p+2\vec{w}\times\vec{u}=f & \forall x\in\Omega,\quad t>0 \\ \nabla.u=0 & x\in\Omega \\ \dfrac{\partial q_n}{\partial t}+\vec{u}.\nabla q_n-c_{q_n}\Delta q_n=S_{q_n} & \forall x\in\Omega,\quad t>0 \\ u(x,0)=u_0(x) \quad \forall x\in\Omega & \\ q_n(x,0)=q_0(x) \quad \forall x\in\Omega & \\ u=0,\ q_n=0 \quad \forall x\in\partial\Omega & \end{cases}$$

i) $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}.\nabla)\vec{u}-\nu\,\Delta\vec{u}+\nabla p+2\vec{w}\times\vec{u}=f$ es la conservación del movimiento del fluido.

ii) $\nabla.u=0$ ecuación de continuidad para fluidos incompresibles, esto es, la densidad es constante.

iii) La ecuación de conservación de agua $\dfrac{\partial q_n}{\partial t}+\vec{u}.\nabla q_n-c_{q_n}\Delta q_n=S_{q_n}$ $\quad n=1,2$, de variable dependiente $q_n(x,t)$ representa a las precipitaciones, definidas como un conjunto de partículas de constitución de agua en estado sólido o líquido en suspensión o caída libre en la atmosfera.

Espacios de funciones test. Sea $\Omega \subset R^3$, con condiciones de adherencia fijas en la frontera, es decir: $u=q=0$ *en* $\partial\Omega$ y sea un fluido en la región Ω. Las funciones test $v\in\xi_0(\Omega)$ funciones vectoriales regulares con divergencia nula con soporte compacto en Ω y funciones test escalares $\alpha \in \zeta_0(\Omega)$.

$$\xi_0(\Omega)=\left\{v\in C_0^\infty(\Omega,\ R^3)\,/\,\nabla.v=0\right\}$$
$$\zeta_0(\Omega)=\left\{\alpha\in H^1(\Omega)\,/\,\alpha=0\ en\,\partial\,\Omega\right\}$$

- $J_0(\Omega)$ es el espacio de funciones test para el problema matemático.

Proceso de la formulación variacional del modelo.
Sean v función vectorial con soporte compacto en Ω con $\nabla.v=0$ y α función escalar regular con valores de cero en la frontera de Ω. Multiplicando las ecuaciones del modelo por las funciones test respectivamente, se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t}.v+(u.\nabla)u.v-\upsilon\,\Delta u.v+\nabla p.v+2(w\times u).v=f.v \qquad v\in\xi_0(\Omega)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}.\alpha+(u.\nabla)\,q.\alpha-c_q\,\Delta\,q.\alpha=S_q.\alpha \qquad \alpha\in\zeta_0(\Omega)$$

Sumando las ecuaciones e integrando en Ω.

$$\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}.v\;dx+\int_\Omega(u.\nabla)u.v\;dx-\upsilon\underbrace{\int_\Omega\Delta u.v\;dx}_{a}+\underbrace{\int_\Omega\nabla p.v\;dx}_{b}+2\int_\Omega(w\times u).v\;dx+\int_\Omega\frac{\partial q}{\partial t}.\,\alpha\;dx+$$

$$\int_\Omega(u.\nabla)\,q.\alpha\;dx-c_q\underbrace{\int_\Omega\Delta\,q.\alpha\;dx}_{c}=\int_\Omega S_q.\,\alpha\;dx+\int_\Omega f.v\;dx \qquad (1$$

Aplicando la identidad de Green en $(a),(b)\;y\,(c)$ en la ecuación (1), se obtiene la formulación variacional en forma diferencial.

$$\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}.v\,dx+\int_\Omega\frac{\partial q}{\partial t}.\,\alpha\;dx+\int_\Omega(u.\nabla)u.v\,dx+\int_\Omega(u.\nabla)\;q.\,\alpha\;dx-\upsilon\int_\Omega\nabla u.\nabla u\,dx+2w\int_\Omega(j\times u).\,v\,dx$$

$$-c_q\int_\Omega\nabla q.\nabla\alpha\;dx=\int_\Omega S_q.\,\alpha\;dx+\int_{\Omega 2}f.v\,dx \qquad (2)$$

En la ecuación (2) utilizando notación de producto interno y con el fin de obtener expresiones más sencillas se obtuvo la formulación variacional.

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t},\,z\right)_{H_0(\Omega)}+b(g,g,z)+K(g,\,z)_{V_0(\Omega)}+2w(Lg,z)_{H_0(\Omega)}=(f,\,z)_{H_0(\Omega)}\;\forall\,z\in J_0(\Omega)$$

$$g(x,0)=g_0(x) \qquad (3)$$

RESULTADOS

Para la demostración de la existencia de soluciones débiles, se utilizaron teoremas de compacidad, la aplicación del teorema de Temam y espacios de Sobolev.

Teorema 6. (Temam, 1982) Sean E_1 y E_2 espacios de Banach, $E_1\subset E_2$ con inmersión compacta. Si $\{g^m\}$ una sucesión acotada en $L^1(0,T;E_1)$ y acotada en $L^p(0,T,E_2)$, $p>1$ y si $\lim_{h\to 0}\sup_m\int_0^{T-h}\left\|g^m(t+h)-g^m(t)\right\|_{E_2}\,dt\;=0$, entonces $\{g^m\}$ es precompacta en $L^p(0,T,E_2)$

Espacios de Sobolev. En un espacio de Sobolev, cuando $p=2$, se denota $W^{m,p}(\Omega)=H^m(\Omega)$:

- $L^2(\Omega)=\left\{f:\Omega\to R\;medible\,/\int_\Omega|f(x)|^2<\infty\right\}$
- $H_0^1(\Omega)=\{u\in H^1(\Omega)\,/\,u=0\;\;en\,\partial\Omega\}$

DISCUSIÓN

Existencia de soluciones débiles del modelo matemático

En esta sección se demuestra la existencia de soluciones débiles del modelo matemático en la formulación variacional.

En la ecuación (3) el término no lineal $b(g,g',z)$, para funciones regulares $u \in (C_0^\infty(\Omega))^3$ con $g, z \in (C_0^\infty(\Omega))^4$ es definido como:

$$b(g,g',z) = \int_\Omega ((g.\nabla g).z)\,dx = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega g_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} z_i\,dx$$

Aplicando la desigualdad de Hölder, se tiene:

$$|b(g,g,z)| \le \|g\|_{L^4(\Omega)} \|g\|_{H_0^1(\Omega)} \|z\|_{L^4(\Omega)}$$

Se tiene que $V_0 \subset (H_0^1(\Omega))^4 \subset (L^4(\Omega))^4$, en particular $b(g,g',z)$ está bien definido en $V_0 \times V_0 \times V_0$.

Método de aproximación de Galerkin

$J_0(\Omega)$ es un espacio vectorial separable y denso en H_0, entonces es posible considerar una base ortonormal $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ de H_0 formado por elementos de $J_0(\Omega)$. Para cada $m \in N$ se define el subespacio vectorial:

$$J_0^m(\Omega) = Span\{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \quad m \le n$$

Este es una familia de subespacios creciente y denso en V_0. Se define una solución aproximada $g^m : [0,T] \to J_0^m(\Omega)$, la cual tendrá la forma.

$$g^m(t) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k^m(t) z_k$$

Y debe satisfacer el problema aproximado

$$(\mathrm{PA})\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(g^m(t), z\right)_{H_0} + b(g^m(t), g^m(t), z) + K(g^m(t), z)_{V_0} + \\ \qquad\qquad 2w(Lg^m(t), z)_{H_0} = (f, z_j)_{H_0} \qquad \forall z \in J_0^m(\Omega) \\ g^m(0) = g_0^m \qquad t = 0 \end{cases}$$

Para resolver el problema aproximado (PA) es suficiente determinar los coeficientes para las soluciones aproximadas $g^m(t)$ es decir $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \ldots, \beta_m(t))$. Remplazando $g^m(t) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k^m(t) z_k$ en el problema (PA) se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma:

$$(\mathrm{PO})\begin{cases} \beta'(t) = F(\beta(t)) & t > 0 \\ \beta(0) = \delta \end{cases}$$

Aplicando el teorema de Picard o de Peano se obtiene la existencia y unicidad local de soluciones del (PO), es decir, existe $T_m = T(m, g_0^m)$ tal que $\beta(t)$ existe $\forall\, t \in [0, T_m]$ de esa manera existe solución local $g^m(t)$ del (PA) y $g^m \in C^1([0,T_m]; J_0^m(\Omega))$.

Estimativas a priori

- **Estimativas a priori en V_0**

En la desigualdad (5), se integra en el tiempo:

$$\left\|g^m(t)\right\|_{H_0}^2 - \left\|g^m(0)\right\|_{H_0}^2 + K\lambda\int_0^T \left\|g^m(t)\right\|_{V_0}^2 dt \le \frac{T}{\lambda K}\left\|f\right\|_{H_0}^2$$

$$K\lambda\int_0^T \left\|g^m(t)\right\|_{V_0}^2 dt \le \left\|g^m(0)\right\|_{H_0}^2 \frac{T}{\lambda K}\left\|f\right\|_{H_0}^2$$

Ya se ha visto que g_0^m es acotada uniformemente en H_0 y para un T fijo resulta:

$$K\lambda\int_0^T \left\|g^m(t)\right\|_{V_0}^2 dt \le C_1 \qquad (7)$$

Entonces $\{g^m(t)\}_m$ es acotada uniformemente en $L^2(0,T,V_0) \qquad \forall t > 0$

- **Estimativas a priori para paso en el tiempo.**

Integrando en el tiempo de t a $t+h$ en la ecuación débil aproximada (5)

$$\left|(g^m(t+h), z)_{L^2} - (g^m(t), z)_{L^2}\right| \le$$

$$\left|\int_t^{t+h}\left\{(f,z)_{H_0} - K(g^m(t), z)_{V_0} - b(g^m(t), g^m(t), z) + 2w(Lg^m(t), z)_{H_0}\right\}dt\right|$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy Schwarz, desigualdad triangular, desigualdad de Poincaré, desigualdad de Hölder e inmersiones de Sobolev.

$$\left|(g^m(t+h), z)_{H_0} - (g^m(t), z)_{H_0}\right| \le \left\{c_1 h + c_2 h^{1/2} + c_3 h^{1/4}\right\}\|z\|_{V_0}$$
$$\le C_T h^{1/4}\|z\|_{V_0}$$

Tomando el supremo en $z \in J_0^m(\Omega)$ con $\|z\|_{V_0} = 1$, entonces

$$\left|(g^m(t+h), z)_{H_0} - (g^m(t), z)_{H_0}\right| \le C_T h^{1/4} \quad \forall t \in [0, T_m] \quad y \quad \forall m \in N \qquad (8)$$

En particular, si $z = g^m(t+h) - g^m(t) \in J_0^m$

$$\left|(g^m(t+h) - g^m(t), g^m(t+h) - g^m(t))_{H_0}\right| \le Ch^{1/4}\left\|g^m(t+h) - g^m(t)\right\|_{V_0}$$

$$\left\|g^m(t+h) - g^m(t)\right\|_{H_0}^2 \le Ch^{1/4}\left\|g^m(t+h) - g^m(t)\right\|_{V_0}$$

Integrando en t de $0\,a \quad T-h$

$$\int_0^{T-h}\left\|g^m(t+h) - g^m(t)\right\|_{H_0}^2 dt \le C_0\int_0^{T-h}\left\|g^m(t+h) - g^m(t)\right\|_{V_0} dt$$

$$(1 - C_0)\int_0^{T-h}\left\|g^m(t+h) - g^m(t)\right\|_{H_0}^2 dt \le 0$$

$$\lim_{h\to 0}\sup_m \int_0^{T-h}\left\|g^m(t+h) - g^m(t)\right\|_{L^2}^2 dt = 0$$

Se cumplen las hipótesis del teorema de Temam $g^m(t)$ es precompacta en $L^2(0,T,H_0)$ entonces $g^m(t) \to g\ en\ L^2(0,T,H_0)$.

CONCLUSIONES

1. Con el método de Faedo-Galerkin se obtuvo el problema aproximado sobre el cual se logro demostrar soluciones aproximadas finito dimensionales a partir de coeficientes $\beta(t)$, de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.
2. Se demostró la existencia de soluciones débiles del modelo matemático en espacios de Sobolev H_0 y V_0, esto es:

$$\exists\, g \in L^{\infty}(0,\infty;H_0) \cap L^2(0,T,V_0) \cap L^2(0,T,H_0), \text{ tal que:}$$
$$g^m \xrightarrow{*} g \in L^{\infty}(0,\infty;H_0)$$
$$g^m \longrightarrow g \in L^2(0,T,V_0)$$
$$g^m \longrightarrow g \in L^2(0,T,H_0)$$

AGRADECIMIENTOS

Expreso mi agradecimiento a la Universidad Nacional de Trujillo, Escuela de Postgrado por el apoyo a la investigación en Ciencias Básicas y a los profesores por sus enseñanzas y aportes al desarrollo del trabajo de investigación, a la Universidad Nacional del Altiplano-Puno por hacer posible la realización de mis estudios de Doctorado en la UNT.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brézis, Haim. (1984) Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones, Editorial Mansson, París.

Guermond y Quartapelle L. (1998) On the approximation of the unsteady Navier-Stokes equation by finite element projection methods. Numerische Mathematyk, Numer.Math. 80, pp. 207-238.

Movilla Félix, GUTIÉRREZ Gail, GUÍÑEZ Jorge. (2010) Solución de las Ecuaciones de Navier-Stokes usando Colocación Local de Funciones de Base Radial, Asociación Argentina de Mecánica Computacional.

Pielke A. Roger. (2002) Mesoscale Meteorological Modeling Second Edition. Ed. Academic Prest, Colorado USA.

Temam, Roger. (1995) Navier Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis, Second Edition Philadelphia, Pennsylvania.

Correspondencia

Juana Idelza Zavaleta Gómez

Juana317@yahoo.com