



Parámetros de forma de una cuenca referenciados con el círculo y la lemniscata, aplicados a la subcuenca del río Llanganuco- Perú

Shape parameters of a basin referenced with the circle and the lemniscate, applied to the sub-basin of the Llanganuco river- Peru

TORIBIO MARCOS REYES RODRÍGUEZ  ¹ y MAXIMILIANO ASÍS - LÓPEZ  ¹

RESUMEN

El objetivo de la investigación consistió en deducir los parámetros de forma de una cuenca referenciados con la lemniscata, después realizar un análisis comparativo con los parámetros de forma referenciados con el círculo y aplicarlos a la subcuenca del río Llanganuco. El procedimiento seguido, deducción del área y perímetro de la lemniscata, deducción de los parámetros de forma de una cuenca referenciados con la lemniscata, comparación de los parámetros de forma referenciados con el círculo y la lemniscata. Además, se determinaron los parámetros de forma referenciados con el círculo y la lemniscata de la subcuenca del río Llanganuco. La relación del coeficiente de compacidad de una cuenca referenciado con el círculo y la lemniscata es 1,048; la relación de la razón de circularidad y de lemniscata de una cuenca es 0,914 y la relación de la razón de elongación de una cuenca referenciado con el círculo y con la lemniscata es 0,798. Para la subcuenca del río Llanganuco, el coeficiente de compacidad referenciado a la lemniscata es 1,420; la razón de lemniscata es 0,495; la razón de elongación referenciado con la lemniscata es 0,687 y la razón de lemniscata de Chorley es 0,856.

Palabras clave: cuenca; parámetro; lemniscata; elongación.

¹Universidad Santiago Antúnez de Mayolo. Huaraz, Perú.

© Los autores. Este artículo es publicado por la Revista Aporte Santiaguino de la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo. Este es un artículo de acceso abierto, distribuido bajo los términos de la Licencia Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), que permite: **Compartir-copiar** y **redistribuir** el material en cualquier medio o formato, **Adaptar-remezclar**, **transformar** y **construir** a partir del material para cualquier propósito, incluso comercialmente.

ABSTRACT

The objective of the research consisted of deducing the shape parameters of a basin referenced with the lemniscate, then carrying out a comparative analysis with the shape parameters referenced with the circle and applying them to the sub-basin of the Llanganuco river. The procedure followed, deduction of the area and perimeter of the lemniscate, deduction of the shape parameters of a basin referenced with the lemniscate, comparison of the shape parameters referenced with the circle and the lemniscate. Besides, the shape parameters referenced with the circle and the lemniscate of the Llanganuco river sub-basin were determined. The ratio of the compactness coefficient of a basin referenced with the circle and the lemniscate is 1,048; the ratio of the ratio of circularity and the lemniscate of a basin is 0,914 and the ratio of the ratio of elongation of a basin referenced with the circle and with the lemniscate is 0,798. For the Llanganuco river sub-basin, the compactness coefficient referenced to the lemniscate is 1,420; the lemniscate ratio is 0,495; the lemniscate referenced elongation ratio is 0,687 and the Chorley lemniscate ratio is 0,856.

Keywords: basin; parameter; lemniscate; elongation.

INTRODUCCIÓN

Las inundaciones causan daños a los recursos naturales y a la calidad del medio ambiente, en consecuencia, aumenta la vulnerabilidad de los sistemas, tanto naturales como humanos (Tran et al. ,2010; Ogarekpe et al. , 2020). Según Das et al. (2022) los parámetros que miden la forma de la cuenca de drenaje son de gran importancia porque no solo miden las formas de las cuencas, sino que también brindan información cuantitativa sobre la forma de la cuenca que controla el hidrograma de flujo del canal. Asimismo, la forma de la cuenca influye en el comportamiento hidrológico de las máximas avenidas de una cuenca. Las cuencas con razón de elongación y de razón de circularidad pequeñas son más propensas a las crecientes, y con coeficientes de compacidad altos son poco propensas a las crecientes por ser alargadas (Rodríguez,2010).

Por otro lado, Martínez (2005) indica que el coeficiente de compacidad circular de una cuenca es la razón del perímetro de una cuenca (P) al perímetro equivalente del círculo de igual área (A) de la cuenca, el mismo que se expresa de la siguiente manera:

$$K_c = 0,282 \frac{P}{\sqrt{A}}$$

Donde K_c es el coeficiente de compacidad circular de la cuenca, P representa el perímetro de la cuenca, A representa el área de la cuenca. Si el coeficiente de compacidad circular de una cuenca es uno, la forma de la cuenca es circular y si es mayor que uno la cuenca tiende a ser alargada (Martínez, 2005).

McCuen (2005), señala que la razón de circularidad de una cuenca es el cociente del área (A) de la cuenca y el área circular equivalente al perímetro (P) de la cuenca, se expresa matemáticamente como:

$$R_c = 12,566 \frac{A}{P^2}$$

Donde R_c es la razón de circularidad de la cuenca, A representa el área de la cuenca, P representa el perímetro de la cuenca. Si la razón de circularidad de una cuenca tiende a cero la cuenca es muy alargada y si es uno la cuenca tiene forma circular, la razón de circularidad de una cuenca varía de 0 a 1 McCuen (2005).

Según McCuen (2005), la relación entre el coeficiente de compacidad y la razón de circularidad está dada por:

$$R_c = \frac{1}{K_c^2}$$

Además, considera la razón de elongación circular de una cuenca como el cociente del diámetro equivalente al área de la cuenca (A) entre la longitud máxima de la cuenca (L_m) paralela al río principal.

$$R_{ec} = 1,128 \frac{\sqrt{A}}{L_m}$$

Donde R_{ec} es la razón de elongación circular de la cuenca, A representa el área de la cuenca, L_m es la longitud máxima de la cuenca. Las cuencas según la razón de elongación circular se clasifican en circulares (0,9 a 1), ovaladas (0,8 a 0,9), menos elongadas (0,7 a 0,8), elongadas (0,5 a 0,7) y más elongadas (< 0,5)

Piskunov,(1997), señala que la ecuación polar de la lemniscata está dada por la ecuación que se

indica:

$$r = a\sqrt{\cos(2\theta)}$$

Donde r representa la distancia dirigida desde el polo a un punto cualquiera de la lemniscata, θ representa el ángulo dirigido desde el eje polar hasta la distancia dirigida y a es la distancia dirigida mayor de la lemniscata. Además, [Chorley \(1957\)](#), propuso la lemniscata que lleva su nombre, cuya ecuación es la que se indica:

$$r = L_m \cos(k\theta)$$

Donde r representa la distancia dirigida desde el polo a un punto cualquiera de la lemniscata, θ representa el ángulo dirigido desde el eje polar hasta la distancia dirigida y L_m es la distancia dirigida mayor de la lemniscata. Además, determinó que el área de la lemniscata que lleva su nombre es igual a la expresión matemática que se indica:

$$A_L = \frac{\pi L_m^2}{4k}$$

Donde A_L representa el área de la lemniscata, L_m representa la longitud máxima de la lemniscata y k representa la razón entre la longitud máxima y ancho máximo de la lemniscata de Chorley. [Chorley \(1957\)](#), determinó que el perímetro de la lemniscata que lleva su nombre es igual a la expresión matemática que se indica:

$$P_L = 2L_m E\left(\frac{\pi}{2}, m\right), m = 1 - \frac{1}{k^2}$$

Donde P_L representa el perímetro de la lemniscata, L_m representa la longitud máxima de la lemniscata, $E(\pi/2, m)$ es la integral elíptica completa y k representa la razón entre la longitud máxima y ancho máximo de la lemniscata de Chorley. Además, [Chorley \(1957\)](#), sugirió un nuevo estándar para estimar la forma de una cuenca de drenaje, mediante la razón de la lemniscata de Chorley:

$$R_{Ch} = \frac{P_L}{P}$$

Donde R_{Ch} representa la razón de la lemniscata de Chorley, P_L representa el perímetro de la lemniscata de Chorley, y P representa el perímetro de la cuenca. Cuando la razón de lemniscata de Chorley se acerca a uno, la forma de la cuenca se aproxima a la lemniscata de Chorley.

Por otro lado, en la actualidad los parámetros de forma de una cuenca referenciados con el círculo son de uso más extendido en la práctica de la hidrología. Sin embargo, la mayoría de las cuencas tienden a la forma de una lemniscata que, a la forma circular, razón por la cual, se dedujeron los parámetros de forma referenciados con la lemniscata: coeficiente de compacidad, razón de forma y razón de elongación.

El objetivo de la investigación es deducir los parámetros de forma de una cuenca referenciados con la lemniscata y compararlos con los parámetros de forma referenciados con la forma circular. Se hizo la aplicación de los parámetros de forma de una cuenca deducidos a la subcuenca del río Llanganuco y de la razón de lemniscata de Chorley. Se deducen las ecuaciones para la determinación del área y perímetro del bucle de una lemniscata; además se realiza la deducción de los parámetros de forma de una cuenca referenciados con la lemniscata y se hace un análisis comparativo con los parámetros de forma de la cuenca referenciados con el círculo.

MATERIALES Y MÉTODOS

Delimitación de la subcuenca del río Llanganuco

Para la delimitación de la subcuenca del río Llanganuco se emplearon las cartas digitales 18 h (Corongo), 18 i (Pomabamba), 19 h (Carhuaz) y 19 i (Huari) descargadas de la página web del Ministerio de Educación del Perú. Las cartas digitales indicadas se procesaron con el software ArcGis 10.8.2 instalada en una laptop Core i5.

Deducción de los parámetros de forma de una cuenca referenciados con la lemniscata

Mediante procesos de integración en coordenadas polares se dedujeron el área y el perímetro del bucle de una lemniscata. Posteriormente, por analogía de los parámetros de forma referenciadas con el círculo se dedujeron los parámetros de forma referenciadas con la lemniscata: parámetro de compacidad, razón de lemniscata y parámetro de elongación.

Estimación de la razón de la lemniscata de Chorley para la subcuenca del río Llanganuco

Empleando las ecuaciones de [Chorley \(1957\)](#), se determinó la razón de lemniscata de Chorley para la subcuenca del río Llanganuco.

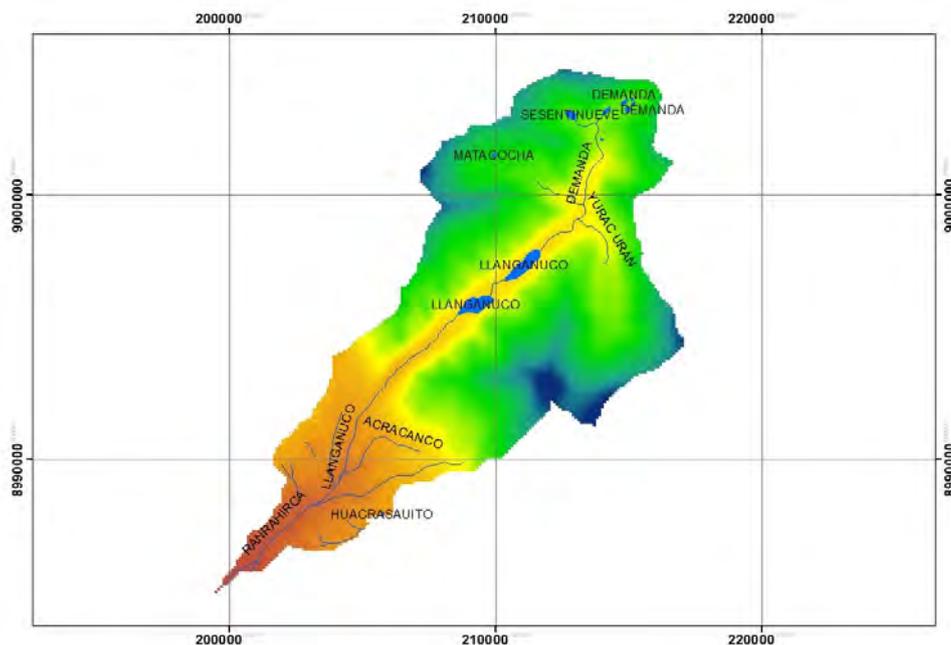
RESULTADOS

Área, perímetro y longitud máxima de la subcuenca del río Llanganuco

El área, el perímetro y la longitud máxima de la subcuenca del río Llanganuco son 147 km², 64 km y 24,97 km respectivamente. En la figura 1 se indica el mapa de la subcuenca del río Llanganuco.

Figura 1

Mapa de la subcuenca del río Llanganuco



Deducción del área y el perímetro de un bucle de lemniscata

El área del bucle de la lemniscata se determinó resolviendo la expresión matemática que se indica:

$$A = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta = \frac{a^2}{2}$$

Además, el perímetro del bucle de la lemniscata se obtuvo resolviendo la expresión matemática que se indica:

$$P = 2a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos(2\theta)}} d\theta = 2,622a$$

Deducción de los parámetros de forma de una cuenca referenciados con la lemniscata

El coeficiente de compacidad K_L es la razón del perímetro P de una cuenca y el perímetro equivalente de la lemniscata de igual área (A) que la cuenca, se expresa mediante la ecuación:

$$K_L = 0,269 \frac{P}{\sqrt{A}}$$

El coeficiente de compacidad de una cuenca en forma de lemniscata es igual a uno y si es mayor que uno la cuenca es alargada.

La razón de lemniscata R_L de una cuenca es la razón del área de la cuenca (A) y el área equivalente de la lemniscata al perímetro de la cuenca P , que se expresa como:

$$R_L = 13,793 \frac{A}{P^2}$$

La razón de lemniscata de una cuenca en forma de lemniscata es igual a uno y si tiende a cero la cuenca es más alargada. Asimismo, el coeficiente de compacidad y la razón de lemniscata están relacionadas por la expresión matemática:

$$R_L = \frac{1}{K_L^2}$$

La razón de elongación (R_{eL}) es el cociente del eje mayor de la lemniscata equivalente al área (A) de la cuenca y la longitud máxima (L_m) de la cuenca paralela al río principal en línea recta, se

expresa mediante la ecuación:

$$R_{eL} = 1,414 \frac{\sqrt{A}}{L_m}$$

La razón de elongación de una cuenca que tiene la forma de una lemniscata es uno.

Análisis comparativo entre los parámetros de forma referenciados con el círculo y con la lemniscata aplicados a la subcuenca del río Llanganuco.

Los coeficientes de compacidad referenciados con el círculo y con la lemniscata son 1,489 y 1,420 respectivamente para la subcuenca del río Llanganuco. Asimismo, las razones de circularidad y de lemniscata son 0,451 y 0,495 respectivamente para la subcuenca del río Llanganuco y las razones de elongación referenciados con el círculo y con la lemniscata son 0,548 y 0,687 para la subcuenca del río Llanganuco.

Razón de lemniscata de Chorley

Empleando las ecuaciones deducidas por [Chorley \(1957\)](#) se determinó la razón de lemniscata de Chorley para la subcuenca del río Llanganuco, que se indica en la tabla 1.

Tabla 1

Determinación de la razón de lemniscata de Chorley (Subcuenca del río Llanganuco)

Datos				Cálculos			
A	P	L _m	k	m	E(m)	P _L	R _{Ch}
km ²	km	km				km	
147,00	64,00	24,97	3,331	0,910	1,097	54,784	0,856

DISCUSIÓN

La mayoría de las cuencas y subcuencas tienen la forma de una pera [Linsley, \(1998\)](#), por lo que, se propuso los parámetros de forma referenciados con la lemniscata. Los parámetros de forma referenciados con la lemniscata que se proponen son los siguientes: Coeficiente de compacidad K_L

$$K_L = 0,269 \frac{P}{\sqrt{A}}$$

Estableciéndose la relación entre los coeficientes de compacidad circular y referenciado con la lemniscata:

Parámetros de forma de una cuenca referenciados con el círculo y la lemniscata, aplicados a la subcuenca del río Llanganuco- Perú

$$\frac{K_c}{K_L} = 1,048$$

Razón de lemniscata R_L

$$R_L = 13,793 \frac{A}{P^2}$$

Estableciéndose la relación entre razón de circularidad y de lemniscata, como se indica:

$$\frac{R_c}{R_L} = 0,914$$

Razón de elongación R_{eL}

$$R_{eL} = 1,414 \frac{\sqrt{A}}{L_m}$$

La relación de la razón de elongación circular y referenciada con la lemniscata se indica:

$$\frac{R_{eC}}{R_{eL}} = 0,798$$

Para la subcuenca del río Llanganuco, los coeficientes de compacidad referenciados con el círculo y con la lemniscata son 1,489 y 1,420 respectivamente que indican que la subcuenca del río Llanganuco tiene forma alargada, tal como indica [Martínez \(2005\)](#) cuando hace referencia al coeficiente de compacidad circular.

Para la subcuenca del río Llanganuco las razones de circularidad y de lemniscata son 0,451 y 0,495; [McCuen \(2005\)](#) al referirse a la razón de circularidad indica que los valores varían de 0 a 1, siendo más alargada cuando tiende a cero, por lo que la subcuenca del río Llanganuco es medianamente alargada.

Para la subcuenca del río Llanganuco las razones de elongación referenciadas al círculo y a la lemniscata son 0,548 y 0,687. Es decir, la subcuenca del río Llanganuco es de forma elongada. La razón de lemniscata de Chorley para la subcuenca del río Llanganuco es igual a 0,856, que indica que la forma de la subcuenca del río Llanganuco tiende a la forma de la lemniscata de Chorley.

CONCLUSIONES

Los coeficientes de compacidad referenciados con el círculo y con la lemniscata están en la relación 1,048; es decir, sus valores son similares para cualquier cuenca. Las razones de circularidad y de lemniscata están en la relación 0,914. La razón de elongación referenciados con el círculo y con la lemniscata están en la relación 0,798. Los parámetros de forma de una cuenca referenciados con la lemniscata pueden emplearse en la caracterización de las cuencas, reemplazándolos con los parámetros clásicos de forma referenciados con el círculo. Los coeficientes de compacidad referenciados con el círculo y con la lemniscata son 1,489 y 1,420; las razones de circularidad y de lemniscata son 0,451 y 0,495; las razones de elongación referenciadas con el círculo y con la lemniscata son 0,548 y 0,687 para la subcuenca del río Llanganuco. La razón de lemniscata de Chorley para la subcuenca del río Llanganuco es igual a 0,856.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Das, B. C.; Islam, A., y Sarkar, B. (2022). Drainage Basin Shape Indices to Understanding Channel Hydraulics. *Water Resources Management*, 36(8), 2523-2547. <https://doi.org/10.1007/s11269-022-03121-4>
- Chorley, R.; Malm, D., y Pogorzelski. (1957). A new standard for estimating drainage basin shape. *American Journal of Sciences*. <https://doi.org/10.2475/ajs.255.2.138>
- McCuen, R.H. (2005). *Hydrologic Analysis and Design*. 3rd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River.
- Martínez, E. (2005). *Hidrología práctica*: Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
- Martínez, F.; Ojeda, A., y Manriquez, H. (2020). *Morfometría y fractalidad en redes de drenaje de cuencas chilenas*. XXIV Congreso Chileno de Ingeniería Hidráulica, Valparaíso, Chile. <https://www.researchgate.net/publication/343675708>
- Linsley, R.; Kohler, M., y Paulhus, J. (1998). *Hidrología para ingenieros*: México: McGraw-Hill.
- Ogarekpe, N. M.; Obio, E. A.; Tenebe, I. T.; Emenike, P. C., y Nnaji, C. C. (2020). Flood vulnerability assessment of the upper Cross River basin using morphometric analysis.

Parámetros de forma de una cuenca referenciados con el círculo y la lemniscata, aplicados a la subcuenca del río Llanganuco- Perú

Geomatics, *Natural Hazards and Risk*, 11(1), 1378-1403. <https://doi.org/10.1080/19475705.2020.1785954>

Piskunov, N. (1997). *Cálculo diferencial e integral*: Moscú: Editorial MIR

Rodríguez, H. (2010). *Hidráulica fluvial*. Colombia: Editorial Escuela Colombiana de Ingeniería.

Tran, P.; Marincioni, F., y Shaw, R. (2010). Catastrophic flood and forest cover change in the Huong river basin, central Viet Nam: A gap between common perceptions and facts. *Journal of environmental management*, 91(11), 2186-2200. <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2010.05.020>

Fecha de recepción: 10/04/23

Fecha de aceptación: 06/06/23

Correspondencia

Toribio Marcos Reyes Rodríguez

tmreyes2@gmail.com